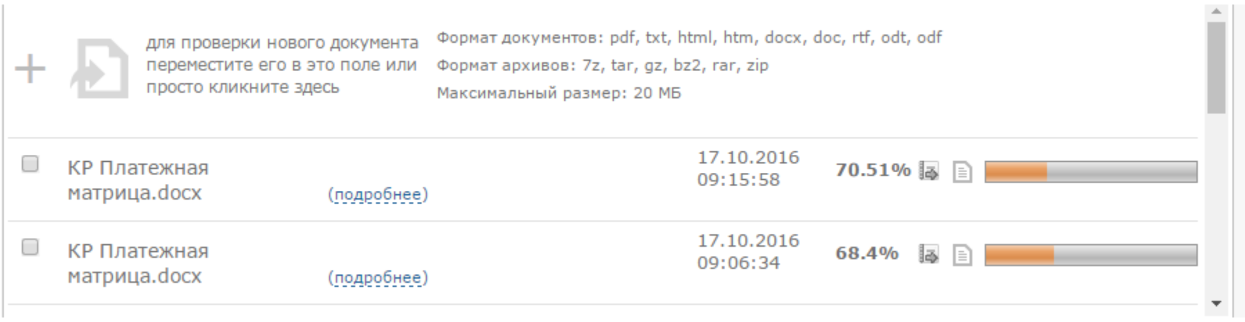
Платежная матрица в задачах выбора и принятии решений



Содержание

Введение

Выполнение управленческих функций неразрывно связано с эффективным принятием решений. На этом основании закономерно утверждать, что процесс принятия решений является центральным пунктом теории управления. Теория управления решает ряд задач, наиболее важной среди которых следует признать повышение эффективности функционирования организаций за счет рационального применения способностей, а также расширения знаний руководства в сфере принятия обоснованных управленческих решений в сложных ситуациях с помощью моделей и количественных методов.

Большинство известных методов принятия решений, которые используется в процессе управления, можно условно отнести к отдельной разновидности моделирования. Вместе с тем, термин «модель» традиционно относится лишь к общим методам анализа, а также к многочисленным их специфическим разновидностям. Однако, методический инструментарий моделирования включает и ряд методов, пригодных для обоснования выбора среди нескольких имеющихся альтернатив наиболее эффективного решения, которое в наибольшей мере способствует достижению целей. В частности, к таким методам относится платежная матрица.

Целью данного исследования является изучение теоретических и методических аспектов применения платежной матрицы в процессе обоснования управленческих решений.

1. Основные теоретические положения метода платежных матриц

Как отмечают специалисты в области моделирования, не смотря на простоту, некоторые модели, используемые в производственном менеджменте, настолько сложны, что без компьютера обойтись невозможно. В то же время, концепция моделирования проста.

По определению Шеннона: «МОДЕЛЬ - это представление объекта, системы или идеи в некоторой форме, отличной от самой целостности». Одним из примеров модели является схема организации, представляющая ее структуру.

Главной характерной особенностью модели принято считать упрощение реальной жизненной ситуации, для которой она используется. Учитывая, что структура и форма модели менее сложна, а не относящиеся к сути проблемы ее параметры, в нее не включаются, модель зачастую способствует более отчётливому пониманию и разрешению проблем, встающих перед субъектом, который принимает решения.

Число всевозможных конкретных моделей науки управления чрезвычайно велико и в полной мере отвечает тому количеству проблем, для разрешения которых они были разработаны.

В наиболее общем случае суть каждого принимаемого руководством решения сводится к выбору наилучшей из имеющихся альтернатив по конкретным предварительно заданным критериям. Одним из методов статистической теории решений, который является полезным при необходимости обоснования выбора одного из нескольких вариантов, является платежная матрица. Ее практическая значимость возрастает в ситуациях, когда необходимо определить стратегию, которая в наибольшей мере будет способствовать достижению целей.

По словам Н. Пола Лумбы: «Платеж представляет собой денежное вознаграждение или полезность, являющиеся следствием конкретной стратегии в сочетании с конкретными обстоятельствами. Если платежи представить в форме таблицы (или матрицы), мы получаем платежную матрицу». При рассмотрении ключевых положений метода платежных матриц принципиально важное значение получают особенности условий применения стратегии, которые возникают в связи с наличием так называемых «конкретных обстоятельств», поскольку они определяют, в каких случаях следует использовать платежную матрицу, а также позволяют определить, когда принятое на ее основе решение будет надежным с наибольшей вероятностью. Вообще, матрица означает, что платеж зависит от определенных событий, которые фактически происходят. Если предусмотренной событие или состояние природы не возникает, платеж неизбежно будет иным.

В практике принятия управленческих решений платежная матрица полезна, когда:

1) есть в наличии разумно ограниченное число альтернатив или вариантов стратегии и необходимо сделать обоснованный выбор между ними.

2) сценарии возможных событий с полной определенностью не определены.

3) результаты принятого решения определяются выбранными альтернативами, а также теми событиями, которые имеют место в действительности.

Рассмотрим ключевые принципы применения метода **платежной матрицы.**

Макет платежной матрицы представлен в таблице 1. Ее строки соответствует различным альтернативным вариантам событий -$\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_M}$, а столбцы - наиболее вероятным значениям реализации стратегий - $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2, \dots, S_N}$.

Общий элемент платежной матрицы $З_{ji}$ - расчетное альтернативное значение стратегии для j-го альтернативного варианта событий и i-го сочетания исходных данных, от которых зависят сценарии развития событий.

Таблица 1. Платежная матрица З = ||Зji||

Варианты событий	Сочетания исходных данных					
	S_1	S_2	…	S_i	…	S_N
x_1	$З_{11}$	$З_{12}$	…	$З_{1i}$	…	$З_{1N}$
x_2	$З_{21}$	$З_{22}$	…	$З_{2i}$	…	$З_{2N}$
…	…	…	…	…	…	…
x_j	$З_{j1}$	$З_{j2}$	…	$З_{ji}$	…	$З_{jN}$
…	…	…	…	…	…	…
x_M	$З_{M1}$	$З_{M2}$	…	$З_{Mi}$	…	$З_{MN}$

Для руководителя также важно иметь возможность объективной оценки вероятности событий по каждому сценарию, а также владеть инструментарием определения ожидаемой вероятности. Очевидно, руководитель редко располагает таким объемом информации, которая обеспечивает ситуацию полной определенности, в то же время, следует признать, что он также очень редко оказывается в условиях полной неопределенности. В большинстве случаев принятия решений руководителю предстоит оценивать вероятность наступления событий или их возможность. Вероятность событий, как известно, варьирует в интервале от 0 до 1. При этом вероятность равна 1, когда событие определенно произойдет, и 0 - когда событие однозначно не произойдет. Вероятность можно определить объективно, опираясь на прошлые тенденции, или субъективно, исходя из ожиданий руководителя, который руководствуется собственным опытом в подобных ситуациях. В случаях, когда вероятность не была принята в расчет, решение всегда будет тяготеть в направлении наиболее оптимистических последствий.

Вероятность является фактором прямого влияния на величину ожидаемого значения результативного показателя платежной матрицы. Исходя из этого, ожидаемое значение альтернативы или варианта стратегии определяется как сумма произведений возможных значений принятых к рассмотрению событий и вероятностей их наступления.

На основании информации об ожидаемых значениях для каждого альтернативного варианта событий, а также результатах наступления событий (такая информация должна быть представлена в виде матрицы), руководитель получает возможность обосновать наиболее оптимальное решений при заданных критериях. Как правило, он будет соответствовать наивысшему ожидаемому значению.

На первом этапе анализа, на основе платежной матрицы З = ||Зji|| рассчитывается матрица рисков - =||ji|| . Для определения значения риска ji для варианта развития событий xj и сочетания исходных данных применяется следующая формула:

$$Э = З_{ji} - З_i^{min}$$

$$\text{где } З_i^{min} = \min_j З_{ij} \tag{1}$$

При принятии решений с помощью метода платежной матрицы руководствуются определенными правилами. Прежде всего, речь идет о специальных критериях принятия решения в условиях неопределенности и риска. Среди таких критериев наиболее востребованными являются:

Критерий Лапласа (минимумы среднеарифметических затрат $З_j$);

Критерий Вальда (минимальных затрат или максимальной полезности);

Критерий Сэвиджа (минимального риска);

Критерий Гурвица.

Максиминный критерий Вальда. Согласно критерию Вальда игра с природой рассматривается как игра с разумным, однако, агрессивным противником, который всеми возможными способами препятствует игроку и пытается помешать ему в достижении успеха. По данному критерию оптимальной считается стратегия, при которой игрок гарантированно получает выигрыш в размере, который не может быть меньше, чем "нижняя цена игры с природой":

$$\alpha = Z_{MM} = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right). \tag{2}$$

В соответствии с критерием Вальда (максиминным критерием) для обоснования выбора оптимального решения применяется следующее правило: в платёжную матрицу вводится дополнительный столбец из наименьших результатов air каждой строки. Среди этих вариантов выбрать следует те, по которым в строках матрицы стоят наибольшие значения air этого столбца. Это позволяет полностью исключить риск для выбранных вариантов, а значит, принимающий решение субъект не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он располагает. Независимо от условий, соответствующий результат не может оказаться ниже Z_{MM}. Это свойство позволяет отнести максиминный критерий к категории фундаментальных. Поэтому он чаще всего применяется в технических задачах. Однако утверждение об отсутствии риска также характеризуется различными потерями. Рассмотрим последовательность применения критерия Вальда на примере (см. таблицу 2).

Таблица 2. Матрица вариантов решения без учёта риска

B X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max\limits_{i} a_{ir}$
X_1	1	10	1	1	
X_2	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1

Среди предложенных вариантов по критерию Вальда оптимальным является вариант X_2, выбирая который мы избегаем неудачного значения 1, реализующего в варианте X_1 при внешнем состоянии B_1, получая вместо него при этом состоянии немного лучший результат 1,1. Вместе с тем, при развитии событий по варианту X_1 игрок теряет выигрыш 10, который возможен в состоянии B_2, получая лишь 1,1. Данный пример доказывает, что во многих практических ситуациях, придерживаясь пессимистической стратегии, исход событий на основании минимаксного критерия может оказаться невыгодным.

Применение критерия Вальда оправдано в тех случаях, когда ситуация, для которой принимается решение, соответствует следующим условиям:

❖ о возможности появления внешних состояний Bj ничего не известно;

❖ приходится считаться с появлением различных внешних состояний Bj;

- решение выполняется только один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск, т.е. ни при каких условиях Bj не допускается возможность того, чтобы результат оказался меньше, чем Z_{MM}.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. При выборе решения по данному критерию, исходят из того, что в оценке ситуации более логично, вместо двух крайностей, придерживаться некоторой альтернативной (средней) позиции, которая учитывает более широкую палитру вариантов поведения природы – от наихудшего до наиболее благоприятного. Гурвиц предложил именно такой компромиссный вариант. Согласно данному подходу для каждого решения следует определить линейную комбинацию min и max выигрыша и принять к рассмотрению ту стратегию, для которой результат окажется максимальным. Таким образом, пытаясь занять сбалансированную позицию, Гурвиц предложил критерий (HW), по которому результат оценивается в пределах между точками крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Для определения функции было предложено два алгоритма расчета. Первый из них имеет вид:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right], \qquad (3)$$

где γ — “степень пессимизма” ("коэффициент пессимизма", весовой множитель), $0 \leq \gamma \leq 1$.

Для выбора оптимального решения на основании оценочного критерия Гурвица (HW – критерия) применяется следующее правило: в матрицу решений вводится дополнительный столбец, который содержит средние взвешенные значения наименьшего и наибольшего результатов каждой строки. Среди полученных комбинаций следует выбирать те варианты Xi, в строках которых стоят наибольшие элементы a_{ir} этого столбца.

При γ=1 критерий Гурвица (3) тождественен критерию Вальда, а при γ =0 – критерию крайнего оптимизма (критерию азартного игрока), который предполагает делать выбор в пользу стратегии с максимальным выигрышем в строке. Учитывая, что крайне сложно определить значения долей оптимизма и пессимизма, которые имеют место при принятии решения. Исходя из этого, в качестве некоторой "средней" точки зрения чаще всего принимается весовой множитель γ=0,5.

Следует также отметить, что значение степени пессимизма во многом определяется мерой ответственности: чем более значимы последствия ошибочных решений, тем сильнее желание субъекта, принимающего решение, застраховаться. При этом степень его пессимизма γ ближе к единице.

Рассмотрим последовательность применения критерия Гурвица для некоторой комбинации сценариев событий (данные представлены в таблице 2) и степени пессимизма γ=0,6. Как видно, для стратегии X_1 минимальное значение равно 1, а максимальное – 10. Применяя формулу (3), рассчитаем a_{1r}=0,6*1+0,4*10=4,6. Аналогичным способом определим искомый критерий для второй стратегии. Далее определим максимальное значение столбца a_{ir}. В результате получим платежную матрицу следующего вида (табл. 3).

Таблица 3

B X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max\limits_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	4,6	4,6
X_2	1,1	1,1	1,2	1,14	

Таким образом, по критерию Гурвица при γ=0,6 следует выбирать стратегию X_1.

Следует отметить, что в специальной литературе часто находит применение и такая модификация критерия Гурвица:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \max_j a_{ij} + (1-\gamma) \min_j a_{ij} \right], \qquad (4)$$

где γ - “степень оптимизма” ("коэффициент оптимизма ", весовой множитель), $0 \le \gamma \le 1$.

При γ=0 критерий Гурвица (4) тождественен критерию Вальда, а при γ=1 совпадает с максиминным решением.

Согласно критерию Гурвица ситуация, в которой принимается решение, должна отвечать следующим условиям:

- о вероятностях появления Bj ничего не известно;
- с появлением состояний Bj необходимо считаться;
- реализуется лишь малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

Критерий Сэвиджа (критерий минимакса риска). На практике, среди возможных решений часто выбирают то, которое, в случае ошибочного выбора, приведет к наименее тяжелым последствиям. Такой подход к выбору решения математически был обоснован американским ученым Сэвиджем (Savage) в 1954 году и получил название по имени автора. Принцип Сэвиджа широко применяется для решения экономических задач, в частности, для обоснования решений в играх человека с природой.

Руководствуясь принципом Сэвиджа, каждому решению соответствует некоторая величина дополнительных потерь, связанных с реализацией такого решения. Тогда, правильное решение не влечет за собой никаких дополнительных потерь, и их величина равна нулю. В свою очередь, для выбранного решения всегда можно рассчитать определенное соотношение дополнительных потерь по сравнению с реализацией решения, правильного при данном состоянии природы. Важно помнить, что при выборе решения, наиболее адекватного различным состояниям природы, необходимо принимать во внимание только эти дополнительные потери, потому что они и показывают следствия ошибок выбора.

Алгоритм решения задачи предполагает, что на первом этапе должна быть построена так называемая “матрица рисков”. Ее элементы показывают, какой убыток понесет принимающий решения субъект в результате выбора неоптимального варианта решения.

В данном случае принципиальное значение приобретает категория риска.

Так, в случае обоснования выбора стратегии **i** в условиях (состояниях) природы **j** понятие риска рассматривается как разность между максимальным выигрышем, который можно получить в этих условиях и выигрышем, который получит игрок в тех же условиях, применяя стратегию i.

Следуя данной логике, игрок, которому заранее известно будущее состояние природы j, выберет стратегию, которой соответствует максимальный элемент в данном столбце: $\max_j a_{ij}$, и тогда риск: $r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}$.

Руководствуясь критерием Сэвиджа, в условиях неопределенности следует выбирать решение, которое обеспечивает минимальное значение максимального риска:

$$Z_S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij} \right). \qquad (4)$$

Рассмотрим применение критерия Сэвиджа для данных таблицы 3.

Строим матрицу "рисков" для этого находим максимальные значения для каждого столбца таблицы 1. Они равны 1.1; 10 и 1.2 соответственно и находим значения рисков по формуле $r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}$. Далее платежную матрицу необходимо дополнить столбцом наибольших разностей. На следующем этапе необходимо выбрать те варианты, для которых в строках находится наименьшее для этого столбца значение. По результатам произведённых аналитических процедур составим таблицу 4.

Таблица 4. Матрица рисков

B X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	0,1	0	0,2	0,2	0,2
X_2	0	8,9	0	8,9	

Таим образом, по критерию Сэвиджа наиболее оптимальной является стратегия X_1 .

Критерий Лапласа. В основу критерия положено предположение о том, что в силу неизвестности будущих состояний природы их вероятность следует считать одинаковой. Данный подход называется критерием недостаточного основания Лапласа.

Для определения оптимальной стратегии по критерию Лапласа, необходимо для каждого варината подсчитать математическое ожидание выигрыша (вероятности состояний природы полагаются равными $q_j = 1/n$, $j = 1{:}n$), и выбирать то решение, при котором значение этого выигрыша является максимальным.

$$Z_L = \max_i a_{ir}, \tag{5}$$

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{6}$$

Учитывая, что гипотеза о равной вероятности различных состояний природы является довольно искусственной, считается, что принцип Лапласа может применяться в ограниченных случаях. В более общем случае следует считать, что состояния природы не равновероятны и использовать для обоснования выбора стратегии критерий Байеса-Лапласа.

Критерий Байеса-Лапласа. Важным отличием критерия является то, что он отступает от условий полной неопределенности. Ученый предположил, что наступление возможных состояний природы характеризуется определенной вероятностью. Тогда, математическое ожидание выигрыша для каждого решения необходимо определять с учетом вероятности состояний природы. Среди полученных результатов следует выбирать тот, который дает наибольшее значение выигрыша:

$$Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j. \tag{7}$$

Метод Байеса-Лапласа предполагает возможность использования какой-либо предварительной информации о состояниях природы. При этом рассматриваются условия повторяемости состояний природы, а также повторяемости решений, и, прежде всего, наличие достаточно достоверных данных о прошлых состояниях природы. То есть, критерий предполагает возможность прогнозировать будущее состояние природы (статистический принцип), основываясь на предыдущих наблюдениях.

Рассмотрим последовательность обоснования выбора стратегии по данным исходной таблицы 1. При этом предположим, что q_1=0,4, q_2=0,2 и q_3=0,4. Последовательность шагов выполнения расчетов по критерию Байеса-Лапласа предусматривает, что на первом этапе таблицу 1 следует дополнить столбцом математических ожиданий. Далее, среди значений матрицы необходимо выбрать максимальное значение, как показано в таблице 5.

Таблица 5.

B X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max\limits_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	2,8	2,8
X_2	1,1	1,1	1,2	1,14	

Таким образом, по критерию Байеса-Лапласа оптимальным является стратегия X_1.

Ситуации, для которых принимается решение по критерию Байеса-Лапласа, должна соответствовать следующим условиям:

- вероятности появления состояний Bj известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечное количество раз;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск исключён.

Исходная позиция применяющего – критерий оптимистичнее, чем в случае с применением критерия Вальда, однако она предполагает более высокий уровень информированности и достаточно длинные реализации.

Рассмотренные критерии не исчерпывают всего многообразия критериев выбора решения в условиях неопределенности, в частности, критериев выбора наилучших смешанных стратегий, однако и этого достаточно, чтобы проблема выбора решения стала неоднозначной.

Результаты проведенных расчетов систематизированы в таблице 6. Из таблицы 6 видно, что выбор оптимального решения в значительной степени зависит от исходных допущений и выбранного критерия обоснования решения.

Таблица 6. Оптимальные варианты, полученные с помощью различных критериев

Решение	**Критерии**					
Стратегии	**Вальда**	**maxmax**	**Гурвица, γ=0,6**	**Сэвиджа**	**Лапласа**	**Байеса-Лапласа q_1=0,4, q_2=0,2, q_3=0,4**
X_1		*	*	*	*	*
X_2	*					

Таким образом, выбор критерия, так же как и выбор принципа оптимальности, вполне обоснованно относится к категории наиболее сложных и ответственных задач в теории принятия решений. Вместе с тем, специалисты в области принятия решений обращают внимание на то, что конкретная ситуация, как правило, не бывает настолько неопределенной, чтобы нельзя было получить хотя бы частичной информации относительно вероятностного распределения состояний природы. В этом случае, оценив распределение вероятностей состояний природы, следует руководствоваться методом Байеса-Лапласа, либо необходимо провести эксперимент, который позволит уточнить сценарии поведения природы.

Как показали результаты теоретического анализа, различные критерии принятия управленческих решений связаны с различными условиями, в которых принимаются такие решения. Именно поэтому, в теории принятия решений чаще всего применяются различные критерии, а затем проводится сравнительная оценка полученных результатов. Не менее важно для получения наиболее обоснованных результатов задействовать дополнительную информацию об изучаемой ситуации. Так, если принимаемое решение относится к сотням объектов с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий

Байеса-Лапласа. Если же количество таких объектов невелико, более обоснованно применять критерии минимакса или Сэвиджа.

Таким образом, закономерным следует признать то обстоятельство, что различные критерии отдают предпочтение разным стратегиям, а значит, приводят к обоснованию различных выводов в отношении наиболее рационального решения. Вместе с тем, возможность выбора критерия позволяет ответственным исполнителям, принимающим управленческие решения, делать выбор, в зависимости от тех условий, которым соответствует та или иная ситуация.

Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.

Следует отметить, что существуют и другие обобщенные критерии принятия решений, которые являются комбинациями выше перечисленных критериев. Однако все они, также не лишены ограничений и условностей и не могут обеспечить однозначного выбора варианта деятельности. Именно поэтому окончательный выбор варианта решения остается в компетенции экспертов и специалистов.

2. Пример экономической постановки задачи с использованием платежной матрицы

Фермерскому хозяйству необходимо обосновать выбор наиболее эффективного способа выращивания свеклы на будущий сезон. Рассматриваются четыре возможных способа производства свеклы: Надежный (Н), Обычный (О), Рискованный (Р) и Инновационный (И). Стоимость затрат на производство свеклы каждым из указанных способов задана в таблице 7.

Таблица 7. Стоимость затрат на производство свеклы различными способами (млн. руб.)

Способ	
Надежный	7,7
Стандартный	5,6
Рискованный	9,5
Инновационный	25,4

Урожайность свеклы (тонн) зависит от погодных условий и варианта сельскохозяйственной деятельности так, как задано в таблице 8.

Таблица 8. Урожайность свеклы в зависимости от погодных условий при различных способах сельскохозяйственной деятельности (тонн)

Способ	Погода		
	Благоприятная	Дождливая	Засушливая
Надежный	1100	830	820
Стандартный	1200	830	620
Рискованный	4200	1030	120
Инновационный	2700	2030	1120

Цены на свеклу на рынке зависят от средней урожайности в регионе (см. табл. 9).

Таблица 9. Рыночная цена свеклы в регионе в зависимости от погодных условий (тыс. руб. за тонну)

Погода	Цена, тыс. руб. за тонну
Благоприятная	18
Дождливая	27
Засушливая	36

Вероятность той или иной погоды в регионе проживания фермера задается таблицей 10.

Таблица 10. Вероятность вариантов погоды в регионе проживания фермера (%)

Погода	Вероятность, %
Благоприятная	25
Дождливая	40
Засушливая	35

Кроме того, фермер знает, что по ряду причин на рынке удается продать обычно не более Q тонн свеклы. Оставшуюся свеклу можно сдать перекупщикам по цене C тыс. руб. за тонну.

Q = 2000 – 50 x 4 – 100 x 2 = 1600 тонн ;

C = 4 – 0,1 (2+4) = 3,4 тыс. руб. ;

k = 0,05 (2+4+1) = 0,35.

Задание

1. Записать условие задания со своими исходными данными.

2. Определить оптимальную деятельность фермера по каждому из критериев (Байеса, Вальда, Гурвица, Сэвиджа). (Для критерия Гурвица принять коэффициент пессимизма равным k).

3. Описать для данной конкретной задачи те ситуации (экономические и психологические особенности), при которых фермеру логичнее будет опираться на тот или иной критерий или несколько критериев.

4. Записать четкое управленческое решение, опираясь на один или несколько критериев по своему выбору. Обосновать это решение.

Решение

1. Рассмотрим алгоритм расчета критериев оценки оптимальной стратегии.

2. По критерию Байеса для каждой стратегии (строки) определяется средний ожидаемый результат как сумма произведений вдоль строки результатов на их вероятности:

$$B_i = p_{i1} \cdot a_{i1} + p_{i2} \cdot a_{i2} + \ldots + p_{n1} \cdot a_{n1}$$

Лучшей является стратегия, для которой значение критерия Байеса наибольшее.

Построим матрицу игры с природой для определения прибыли фермера по каждому сценарию событий (табл. 11).

Таблица 11. Таблица для построения матрицы игры с природой

Способ производства	Доходы и затраты фермера при разных варантах погоды								
	Благоприятная			Дождливая			Засушливая		
	урожай-ность, тонн	цена, тыс. руб за тонну	затраты, тыс. руб.	урожай-ность, тонн	цена, тыс. руб за тонну	затраты, тыс. руб.	урожай-ность, тонн	цена, тыс. руб за тонну	затраты, тыс. руб.
Надежный	1100	18	7700	830	27	7700	820	36	7700
Стандартный	1200	18	5600	830	27	5600	620	36	5600
Рискованный	4200	18	9500	1030	27	9500	120	36	9500
Инновационный	2700	18	25400	2030	27	25400	1120	36	25400

Рассчитаем прибыль фермера по каждому сценарию событий. При этом следует также принять во внимание дополнительные ограничения спроса на свеклу Q=1600 тонн и цены на оставшуюся свеклу C=3,4 тыс. руб. за тонну. Эти параметры будут применяться при определении дохода фермера в случае благоприятной погоды (табл. 12).

Таблица 12. Матрица игры с природой

Способ производства	Погода		
	Благоприятная	Дождливая	Засушливая
Надежный	12100	14710	21820
Стандартный	16000	16810	16720
Рискованный	28140	18310	-5180
Инновационный	7140	19262	14920
Вероятность, P	0,25	0,4	0,35

Рассчитаем среднюю ожидаемую прибыль фермера (табл. 13).

Таблица 13. Таблица определения средней ожидаемой прибыли фермера

	П1		П2		П3		Средняя ожидаемая прибыль
C1	12100	0,25	14710	0,4	21820	0,35	16546
C2	16000	0,25	16810	0,4	16720	0,35	16576
C3	28140	0,25	18310	0,4	-5180	0,35	12546
C4	7140	0,25	19262	0,4	14920	0,35	14711,8

B_1 = 12100x0,25+14710x0,40+21820x0,35 = 16456 тыс. руб. ;

B_2 = 16000x0,25+16810x0,40+16720x0,35 = 16576 тыс. руб. ;

B_3 = 28140x0,25+18310x0,40-5180x0,35 = 12546 тыс. руб. ;

B_4 = 7140x0,25+19262x0,40+14920x0,35 = 14711,8 тыс. руб. .

B_I = max (16456; 16576; 12546; 14711,8) = 16576 = $B_2 \Rightarrow C_2$ → The best (Bayes)

Таким образом по критерию Байеса наилучший результат возможен по сценарию C_2.

3. По критерию Вальда для каждой стратегии (строки) определяется наименьший достижимый результат как минимальный элемент в строке:

$$W_I = \min_j (a_{ij}) = \min_{строка} (a_{ij})$$

Лучшей при этом считается стратегия (сценарий), для которой этот результат наибольший:

$$W_I = \max_i W_i$$

Рассчитаем критерий Вальда для условия задачи:

$W_1 = \min(12100; 14710; 21820) = 12100$ тыс. руб. ;

$W_2 = \min(16000; 16810; 16720) = 16000$ тыс. руб. ;

$W_3 = \min(28140; 18310; -5180) = -5180$ тыс. руб. ;

$W_4 = \min(7140; 19262; 14920) = 7140$ тыс. руб.

W_I = max (12100; 16000; -5180; 7140) = 16000 = $W_2 \Rightarrow C_2$ → The best (Wald)

Таким образом, по критерию Вальда наилучшей является стратегия (сценарий) C_2, то есть при благоприятной погоде при стандартном способе производства свеклы.

4. В критерии Гурвица для каждой стратегии определяется «взвешенный» результат из самого пессимистического и самого оптимистического для данной стратегии (сценария). Вес каждого определяется так называемыми коэффициентами пессимизма и оптимизма, сумма которых равна единице.

После задания коэффициента пессимизма k и коэффициента оптимизма (1-k) для каждой стратегии (сценария) необходимо определить пессимистический B_i оптимистический O_i варианты и вычисляют критерий Гурвица :

$$H_i = k \cdot B_i + (1-k) \cdot O_i$$

Лучшей по критерию Гурвица считается стратегия (сценарий), для которой этот результат наибольший:

$$H_I = \max_i H_i$$

Рассчитаем критерий Гурвица для случая в нашей задаче. По условию, коэффициент пессимизма установлен на уровне 0,35. Тогда коэффициент оптимизма составляет 1-0,35 = 0,65.

$H_1 = 0,35 \cdot 12100 + 0,65 \cdot 21820 =$ ¿18418 тыс. руб. ;

$H_2 = 0,35 \cdot 16000 + 0,65 \cdot 16810 =$ ¿16526,5 тыс. руб. ;

$H_3 = 0,35 \cdot 28140 + 0,65 \cdot (-5180) =$ ¿6482 тыс. руб. ;

$H_4 = 0,35 \cdot 7140 + 0,65 \cdot 19262 =$ ¿15019,3 тыс. руб.

H_I = max (18418; 16526,5; 6482; 15019,3) = 18418 = H_1 ⇒ $C_1 \rightarrow$ The best (Hurwich)

Таким образом, по критерию Гурвица наилучшей является стратегия (сценарий) C_1, т.е. по этому критерию наиболее благоприятным для фермера представляется сценарий производства свеклы надежным способом.

5. По критерию Сэвиджа сначала строится матрица (таблица) рисков, руководствуясь следующим алгоритмом:

- матрица строится по столбцам;
- в каждом столбце находим самое большое значение выигрыша;
- из этого значения по очереди вычитают все значения в данном столбце и записывают результат в те же позиции.

Символьно данная процедура имеет вид:

$$r_{ij} = \max_{столб} a_{ij} - a_{ij}$$

Построим матрицу рисков для условия нашей задачи.

Максимальный элемент в первом столбце исходной матрицы равен 28140. Вычитая из этого значения остальные элементы столбца, получаем:

$\begin{pmatrix} 28140-12100=9740 \\ 28140-16000=12140 \\ 28140-28140=0 \\ 28140-7140=21000 \end{pmatrix}$, т.е. первый столбец матрицы рисков равен $\begin{pmatrix} 9740 \\ 12140 \\ 0 \\ 21000 \end{pmatrix}$.

Аналогично находим элементы других столбцов:

$$\begin{pmatrix} 19262-14710=4552 \\ 19262-16810=2452 \\ 19262-18310=952 \\ 19262-19262=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4552 \\ 2452 \\ 952 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 21820-21820=0 \\ 21820-16000=5820 \\ 21820+5180=27000 \\ 21820-14920=6900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5820 \\ 27000 \\ 6900 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица рисков имеет вид:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 9740 & 4552 & 0 \\ 12140 & 2452 & 5820 \\ 0 & 952 & 27000 \\ 21000 & 0 & 6900 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы рисков показывают «недополучение» оптимальной прибыли из-за неверного выбора стратегии при данном состоянии природы.

Далее в каждой строке матрицы рисков определяется наибольший результат (максимальный элемент в строке):

$$S_i = \max(r_{ij}) = \max_{строка}(r_{ij}).$$

Лучшей по критерию Сэвиджа является стратегия, для которой этот результат наименьший:

$S_I = \min_i S_i$

Определим критерий Сэвиджа для условий задачи.

$S_1 = max(9740\,;\,4552\,;\,0) = 9740$

$S_2 = max(12140\,;\,2452\,;\,5820) = 12140$

$S_3 = max(0\,;\,952\,;\,27000) = 27000$

$S_4 = max(21000\,;\,0\,;\,6900) = 21000$

$S_I = min(9740\,;\,12140\,;\,27000\,;\,21000) = 9740 = S_1$

$C_1 \rightarrow The\ best\,(Savage)$

Таким образом, по критерию Сэвиджа наилучшей является стратегия C_1, которая предусматривает производство свеклы надежным способом, в данном случае мы рискуем потерять наименьшую прибыль среди возможных вариантов получения.

Для формирования окончательных выводов систематизируем результаты расчетов по разным критериям.

C_2 → The best (Bayes)

C_2 → The best (Wald)

C_1 → The best (Hurwich)

$C_1 \rightarrow The\ best\,(Savage)$

Как видно, фермер может воспользоваться стратегиями C_1 и C_2, которые обеспечивают ему возможность получения наилучших результатов деятельности.

Таким образом, по совокупности критериев фермеру целесообразно применить стратегии C_1 или C_2 – использовать для производства свеклы надежный или стандартный способ производства.

Список литературы

1. Грешилов А. А. Математические методы принятия решений — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006 .— 583, [1] с.: ил.
2. Дорогов, В. Г. Введение в методы и алгоритмы принятия решений: Учебное пособие / В.Г.Дорогов, Я.О.Теплова. – М.: ИД ФОРУМ: ИНФРА-М, 2012. - 240 с. – режим доступа http://znanium.com.
3. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / под ред. Н.Ш. Кремера – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2010. – 430с.
4. Петровский А. Б. Теория принятия решений — М.: Издательский центр «Академия», 2009 .— 398, [1] с.: ил.
5. Соколов, А. В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т. 1. Общие положения. Математическое программирование: Учебное пособие / Соколов А.В., Токарев В.В. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 564 с.
6. Токарев, В.В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т.2. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность.: Учебное пособие / Токарев В.В. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 420 с.
7. Фатхутдинов, Р. А. Управленческие решения: Учебник / Р.А. Фатхутдинов. − М.: ИНФРА-М, 2010. − 344 с. – режим доступа http://znanium.com.
8. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. — М.: Дело, 2000. — 431 с.
9. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. — 590 с.